1- حل المعادلة $(E): z^2-(\sqrt{3}+i\sqrt{3})z+2i=0$

المميز المختصرلهذه المعادلة هو : $\Delta=(\sqrt{3}+i\sqrt{3})^2-8i$

$$=3+6i-3-8i=-2i=(1-i)^2$$

إذن حلاها هما $\dfrac{\sqrt{3}+i\sqrt{3}+1-i}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

و $\dfrac{\sqrt{3}+i\sqrt{3}-1+i}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$\left\{\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right\}$$

2-أ- لنبين أن : $\dfrac{z_2}{z_0}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

سنبين أن : $z_0\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=z_2$

بما أن : $z_0\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=(1-i)\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$

$$=\frac{-1+\sqrt{3}i+i+\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

فإن : $z_0\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=z_2$

إذن : $\dfrac{z_2}{z_0}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

ب- *تحديد عمدة للعدد العقدي $\dfrac{z_2}{z_0}$

بما أن : $\dfrac{z_2}{z_0}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$$=-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\left[1,\frac{2\pi}{3}\right]$$

فإن : $\arg\dfrac{z_2}{z_0}\equiv\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$

*** عمدة العدد العقدي** z_2

لدينا : $\arg\dfrac{z_2}{z_0}\equiv\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$

أي : $\arg z_2-\arg z_0\equiv\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$

إذن : $\arg z_2 \equiv \frac{2\pi}{3} + \arg z_0 \left[2\pi\right]$

وبما أن : $z_0 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$

فإن : $\arg z_0 \equiv -\frac{\pi}{4}\left[2\pi\right]$

ومنه : $\arg z_2 \equiv \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\left[2\pi\right]$

أي أن : $\arg z_2 \equiv \frac{5\pi}{12}\left[2\pi\right]$

ج- التحقق من أن : $z_2 = z_1 - z_0$

بما أن : $z_1 - z_0 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i - 1 + i$

$= \frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1 + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + 1\right)$

$= \frac{\sqrt{3}+1-2}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1+2}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

فإن : $z_1 - z_0 = z_2$

ملحوظة : من هذه المتساوية نجد : $z_2 - z_1 = -z_0$ و $z_0 - z_1 = -z_2$

د- * لنبين أن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه B

لدينا : $BA = \left|z_0 - z_1\right|$

$= \left|-z_2\right| = \left|z_2\right| = \left|z_0\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right|$

$= \left|z_0\right|\left|-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{2}.1 = \sqrt{2}$

$BC = \left|z_2 - z_1\right|$

$= \left|-z_0\right| = \left|z_0\right| = \sqrt{2}$

إذن : BA = BC

إذن المثلث ABC هو بالفعل متساوي الساقين في B

- **حساب** $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$

$\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) \equiv \arg\frac{z_0 - z_1}{z_2 - z_1}\left[2\pi\right]$

$\equiv \arg\frac{-z_2}{-z_0}\left[2\pi\right]$

$\equiv \arg\frac{z_2}{z_0}\left[2\pi\right]$

وبالتالي فإن : $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\left[2\pi\right]$